Контрольная работа 4

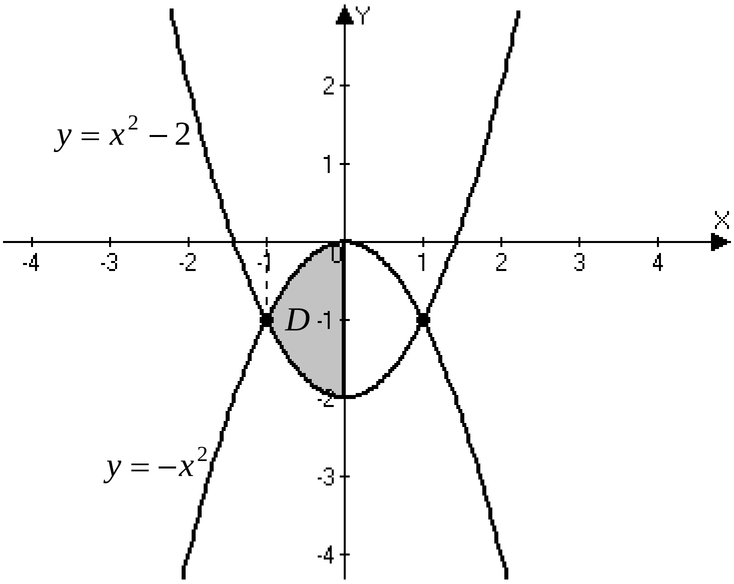
Задача 1.3. Представить интеграл: $a)$ $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ повторным интегралом в декартовых координатах двумя способами, меняя порядок интегрирования, по области D, ограниченной кривыми; $b)$ $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ повторным интегралом по области V, ограниченной заданными поверхностями.

а) D: $y=-x^2$, $y=x^2-2$, $x=0$ $(x\le 0)$

Найдем точки пересечения заданных парабол:

$$\begin{cases} y=x^2-2 \\ y=-x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2=x^2-2 \\ y=-x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2=2 \\ y=-x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y=-x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (-1;-1) \\ (1;-1) \end{matrix}$$

Изобразим область D:



Представим двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по x.

Получаем: на интервале $-1\le x\le 0$, заданная область D ограничена сверху параболой $y=-x^2$, снизу – параболой $y=x^2-2$, значит, на этом интервале переменная y изменяется от $y_1=x^2-2$ до $y_2=-x^2$.

Следовательно: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{x^2-2}^{-x^2}f(x,y)dy$.

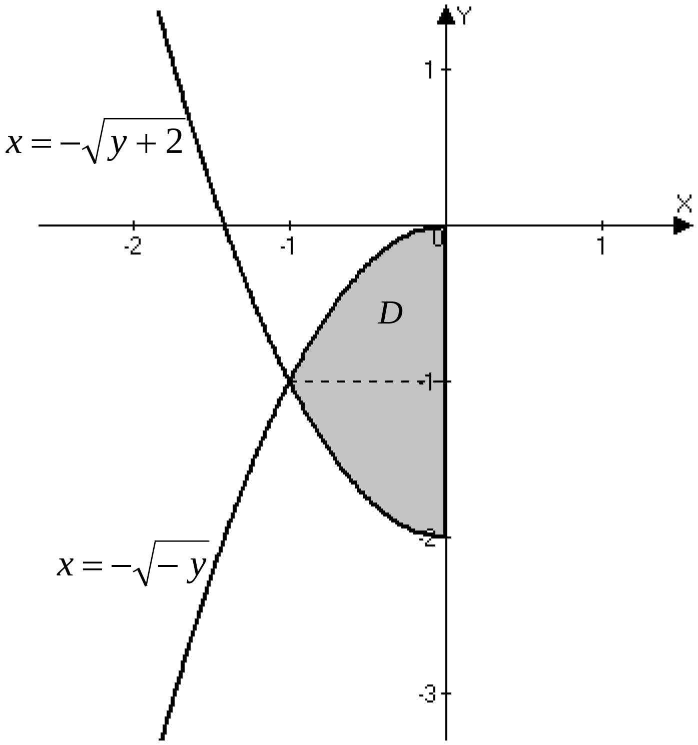
Теперь представим двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по y.

Выразим из уравнений линий явно x через y:

$$y=-x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2=-y \quad |x\le 0| \quad \Rightarrow \quad x=-\sqrt{-y};$$

$$y = x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = y + 2 \quad |x \le 0| \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt{y+2}$$

Получается: на интервале $-2 \le y \le -1$, заданная область D ограничена слева графиком функции $x = -\sqrt{y+2}$, справа – прямой $x = 0$, значит, на этом интервале переменная x изменяется от $x_1 = -\sqrt{y+2}$ до $x_2 = 0$; на интервале $-1 \le y \le 0$, заданная область D ограничена слева графиком функции $x = -\sqrt{-y}$, справа – прямой $x = 0$, значит, на этом интервале переменная x изменяется от $x_1 = -\sqrt{-y}$ до $x_2 = 0$



Следовательно: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{y+2}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$.

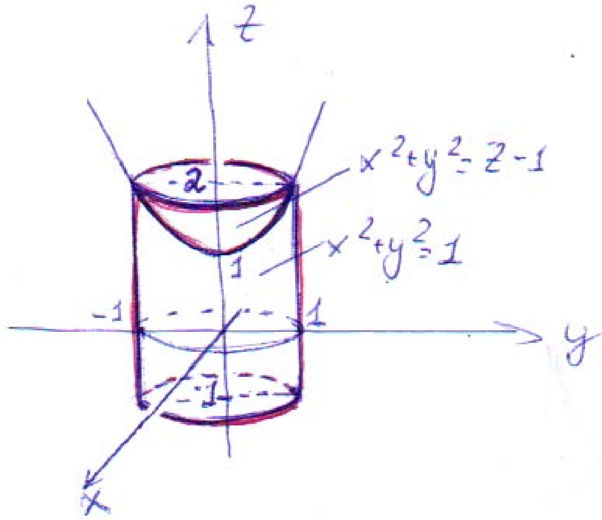
b) $V: \ x^2 + y^2 = 1, \ x^2 + y^2 = z - 1, \ z = -1$

Данная область V ограничена сверху параболоидом $x^2 + y^2 = z - 1$ с вершиной в $(0;0;1)$ и осью симметрии OZ, снизу – плоскостью $z = -1$ и цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ по бокам.

Исследуем пересечение заданных поверхностей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z - 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad z = 2$$

Значит, заданные поверхности пересекаются в плоскости $z = 2$ по окружности $x^2 + y^2 = 1$



Поскольку область V ограничена параболоидом и цилиндром, ее проекцией на плоскость XOY является круг $x^2+y^2=1$, то для расстановки пределов интегрирования перейдем к цилиндрической системе координат. Используем формулы перехода $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$.

Тогда получим:

$$x^2+y^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=\rho^2;$$

$$x^2+y^2=1 \quad\Rightarrow\quad \rho^2=1 \quad\Rightarrow\quad \rho=1;$$

$$z=-1 \quad\Rightarrow\quad z=-1;$$

$$x^2+y^2=z-1 \quad\Rightarrow\quad \rho^2=z-1 \quad\Rightarrow\quad z=\rho^2+1.$$

Так как проекция области V на плоскость XOY круг с центром в $(0;0)$, $0\le\varphi\le2\pi$.

Следовательно, в цилиндрических координатах данная область V описывается неравенствами: $0\le\rho\le1$, $0\le\varphi\le2\pi$, $-1\le z\le\rho^2+1$.

Записывая интеграл в цилиндрических координатах и учитывая якобиан перехода ρ, получаем

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 d\rho\int_{-1}^{\rho^2+1}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\cdot\rho\,dz$$

Задача 2. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

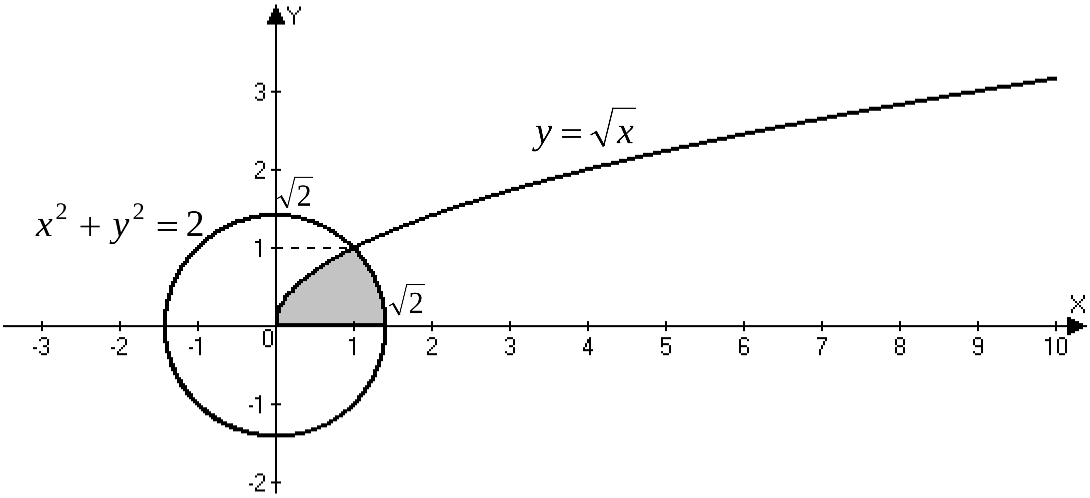
3. $x^2+y^2=2$, $y=\sqrt{x}$, $z=15x$, $y=0$, $z=0$

Данное тело ограничено сверху плоскостью $z=15x$, снизу – плоскостью $z=0$, цилиндром $x^2+y^2=2$, вертикальной плоскостью $y=0$ и параболическим цилиндром $y=\sqrt{x}$ по бокам.

Объем тела вычислим по формуле $V=\iiint\limits_V dxdydz$.

Поскольку тело ограничено сверху плоскостью $z=15x$, снизу – плоскостью $z=0$, то переменная z изменяется от $z_1=0$ до $z_2=15x$.

Рассматривая проекцию данного тела на плоскость XOY $(z=0)$:



находим, что на интервале $0 \le y \le 1$ переменная x изменяется от $x_1 = y^2$ до $x_2 = \sqrt{2-y^2}$.

Следовательно:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} dx \int\limits_0^{15x} dz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} z\Big|_0^{15x} dx = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} 15x dx = 15\int\limits_0^1 \frac{x^2}{2}\Bigg|_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} dy =$$

$$= \frac{15}{2}\int\limits_0^1 \left(2-y^2-y^4\right)dy = \frac{15}{2}\left(2y-\frac{y^3}{3}-\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{15}{2}\cdot\left(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{15}{2}\cdot\frac{22}{15} = 11$$

Задача 3.3. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

a) $a_n = \dfrac{1}{(n+3)\ln^2(n+3)}$

Используем интегральный признак Коши.

Исследуем на сходимость соответствующий несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{(x+3)\ln^2(x+3)}dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{d(\ln(x+3))}{\ln^2(x+3)} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{\ln(x+3)}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{\ln(b+3)}+\frac{1}{\ln 4}\right) = \frac{1}{\ln 4}$$

Интеграл сходится, следовательно, заданный ряд сходится вместе с соответствующим несобственным интегралом.

b) $a_n = \dfrac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}(n+2)!}{(2(n+1))!} : \frac{5^n(n+1)!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}(n+2)!\cdot(2n)!}{5^n(n+1)!\cdot(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{5(n+2)}{(2n+1)(2n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot(2n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{5\left(1+\frac{2}{n}^{\to 0}\right)}{\left(2+\frac{1}{n}^{\to 0}\right)\cdot(2n+2)} = \frac{5\cdot 1}{2\cdot\infty} = \frac{5}{\infty} = 0 < 1$$

Следовательно, согласно признаку Даламбера, исследуемый ряд сходится.

Задача 4. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

$$3.\ u_n(x)=\frac{(x+3)^n}{n^3+5n}$$

Используя признак Даламбера, найдем интервал сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x+3)^{n+1}}{(n+1)^3+5(n+1)}}{\dfrac{(x+3)^n}{n^3+5n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+3)^{n+1}(n^3+5n)}{(x+3)^n\left((n+1)^3+5n+5\right)}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+3)\cdot(n^3+5n)}{(n+1)^3+5n+5}\right|=|x+3|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+5n}{(n+1)^3+5n+5}=|x+3|\cdot 1=|x+3|$$

Согласно признаку Даламбера ряд сходится при $|x+3|<1$, тогда $-1<x+3<1 \;\Rightarrow\; -4<x<-2$ – интервал сходимости ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала.

При $x=-4$ получим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4+3)^n}{n^3+5n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+5n}$$

Исследуем полученный знакочередующийся ряд на абсолютную сходимость. Для этого составим и исследуем на сходимость ряд из модулей членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^3+5n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+5n}.$$

Сравним его со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ (обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha>1$ сходится). Для всех натуральных номеров выполнено неравенство $\frac{1}{n^3+5n}<\frac{1}{n^3}$. Значит, по признаку сравнения исследуемый ряд сходится вместе с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

Следовательно, полученный знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

При $x=-2$ получим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2+3)^n}{n^3+5n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n^3+5n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+5n}$$

Полученный ряд сходится (показано выше).

Следовательно, область сходимости заданного ряда $x\in[-4;-2]$.

Задача 5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить $\int_0^b f(x)dx$ с точностью 0,0001 .

$$6.\ \ f(x)=\cos x^2,\ b=\frac{1}{3}$$

Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Используя разложение:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!},$$

получим:

$$\cos x^2=1-\frac{(x^2)^2}{2!}+\frac{(x^2)^4}{4!}-\frac{(x^2)^6}{6!}+\ldots=1-\frac{x^4}{2}+\frac{x^8}{24}-\frac{x^{12}}{720}+\ldots$$

Следовательно:

$$\int_0^{1/3}\cos x^2\,dx=\int_0^{1/3}\left(1-\frac{x^4}{2}+\frac{x^8}{24}-\frac{x^{12}}{720}+\ldots\right)dx=\left(x-\frac{x^5}{10}+\frac{x^9}{216}-\frac{x^{13}}{9360}+\ldots\right)\Bigg|_0^{1/3}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{216}\cdot\frac{1}{3^9}-\frac{1}{9360}\cdot\frac{1}{3^{13}}+\ldots-0\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3^5}\approx 0,3329$$

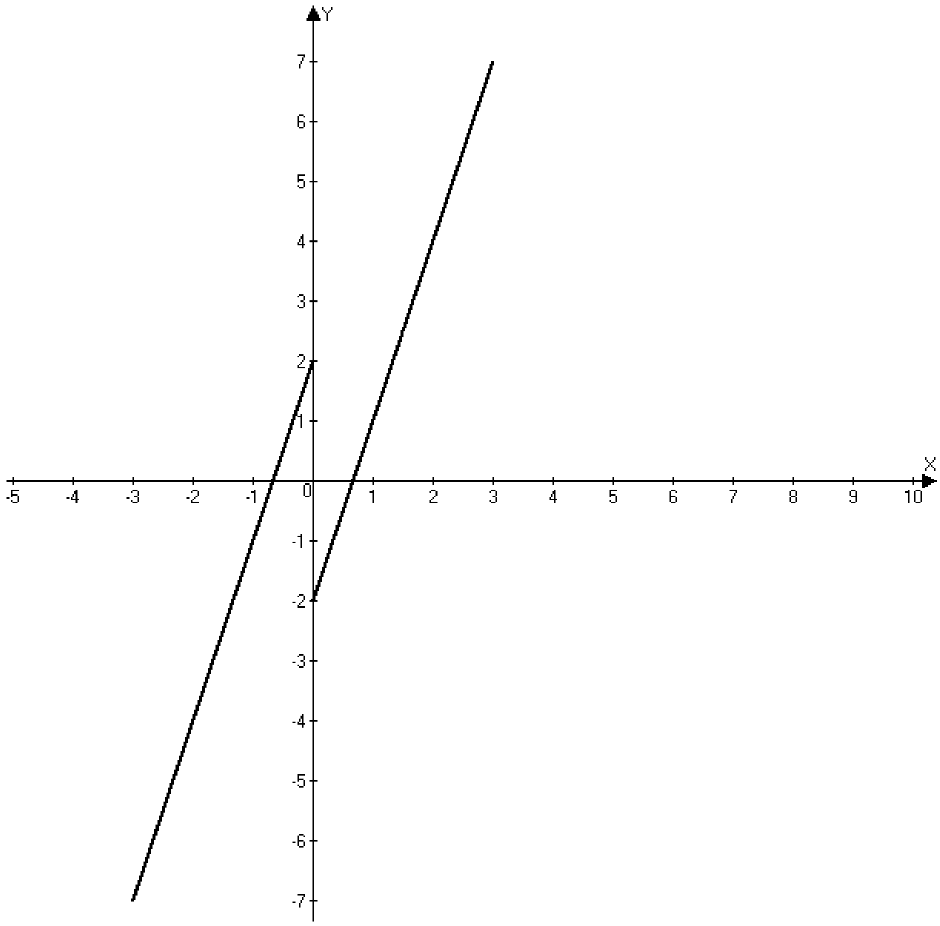
Для вычисления интеграла взяли только первых два слагаемых, так как полученный знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, а поэтому допускаемая погрешность должна быть меньше первого из отброшенных членов ряда. Первый из отброшенных членов ряда равен $\frac{1}{216}\cdot\frac{1}{3^9}\approx 0,00000024<0,0001$

Задача 6. Разложить элементарную функцию $f(x)$ на заданном интервале в ряд Фурье: 1) по синусам; 2) по косинусам; 3) получить одно из разложений общего вида; для каждого случая построить графики периодического продолжения $f(x)$ и суммы ряда Фурье

$$\textbf{3.}\ f(x)=3x-2,\ x\in[0,3]$$

1) Разложим заданную функцию в ряд Фурье по синусам.

Ряд Фурье по синусам в общем случае существует только для нечетной функции. Для того, чтобы построить ряд Фурье по синусам для нашей функции, продолжим ее нечетным образом на промежуток $x\in[-3;0]$



Разложение функции в ряд Фурье по синусам на произвольном интервале $(-l;l)$ имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$$

В данном случае, функция определена на полупериоде $[0,3]$, т.е. $l=3$. Найдем коэффициенты b_n искомого ряда:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx=\frac{2}{3}\int_0^3 (3x-2)\cdot\sin\frac{\pi n x}{3}dx=$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{По частям}: \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \\ u = 3x - 2 \quad \Rightarrow \quad du = 3dx \\ dv = \sin\frac{\pi nx}{3} dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3} \end{array} \right|$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{3(2-3x)}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_0^3 + \frac{9}{\pi n}\int_0^3 \cos\frac{\pi nx}{3}dx \right) = \frac{2}{3}\left(\frac{-21}{\pi n}\cos\pi n - \frac{6}{\pi n}\cos 0 + \frac{27}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_0^3 \right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{-21}{\pi n}\cdot(-1)^n - \frac{6}{\pi n}\cdot 1 + \frac{27}{\pi^2 n^2}\sin\pi n - \frac{27}{\pi^2 n^2}\sin 0 \right) = \frac{2}{3}\left(\frac{-21\cdot(-1)^n}{\pi n} - \frac{6}{\pi n} + \frac{27}{\pi^2 n^2}\cdot 0 - \frac{27}{\pi^2 n^2}\cdot 0 \right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{21\cdot(-1)^{n+1} - 6}{\pi n} = \frac{14\cdot(-1)^{n+1} - 4}{\pi n}$$

Таким образом, искомое разложение функции в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14\cdot(-1)^{n+1} - 4}{\pi n}\cdot\sin\frac{\pi nx}{3}, \quad x \in [0,3]$$

Изобразим график суммы ряда Фурье по синусам

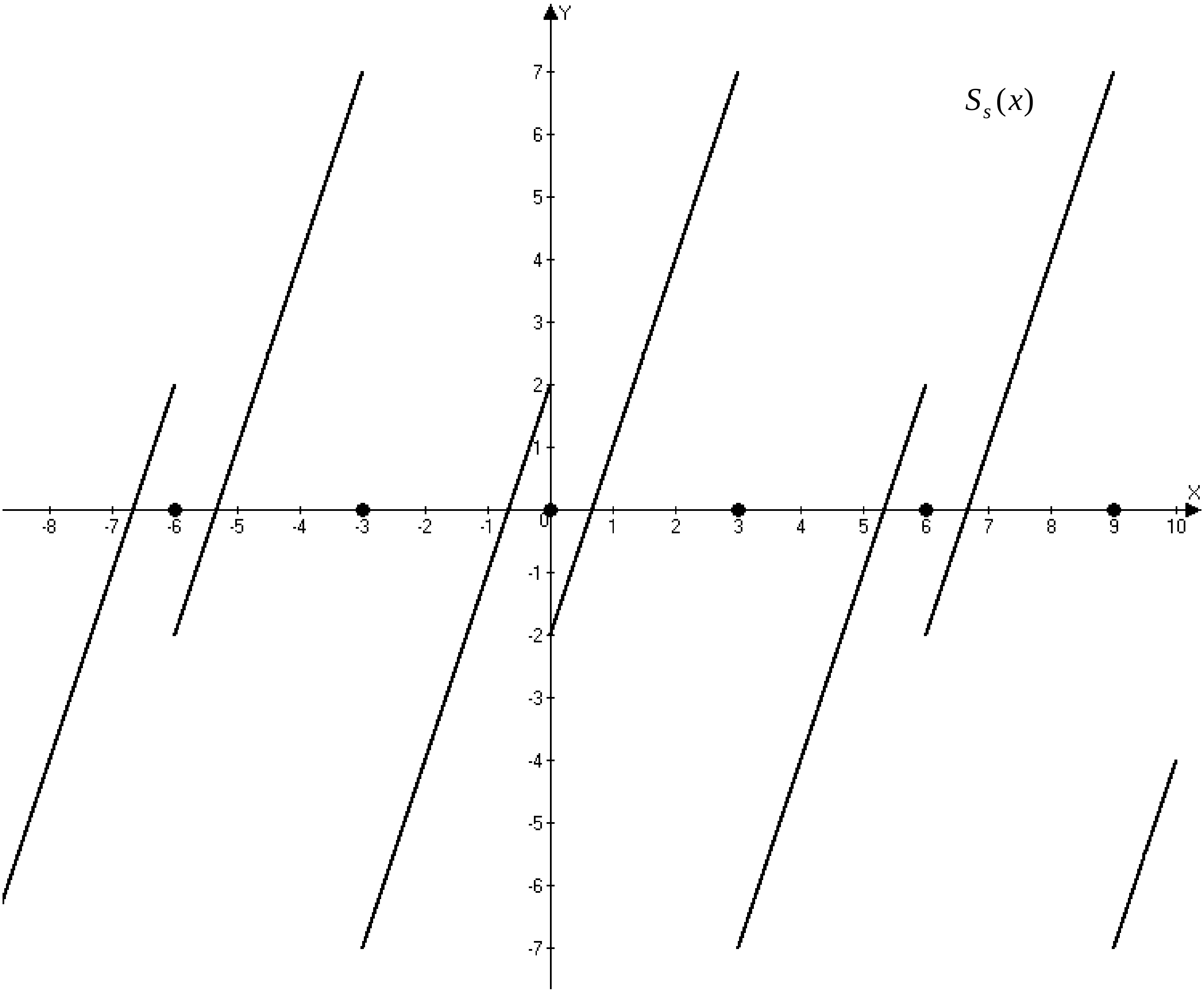
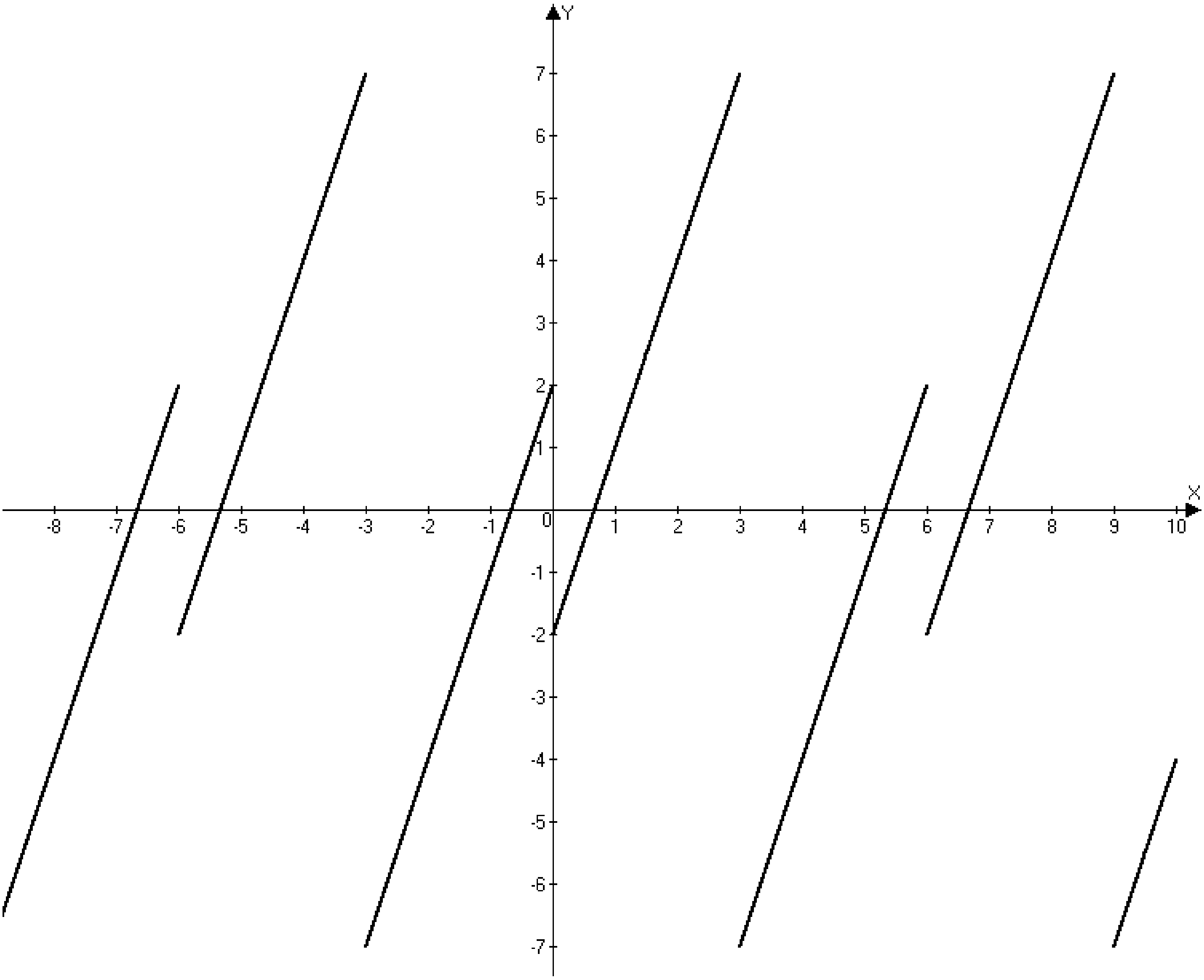
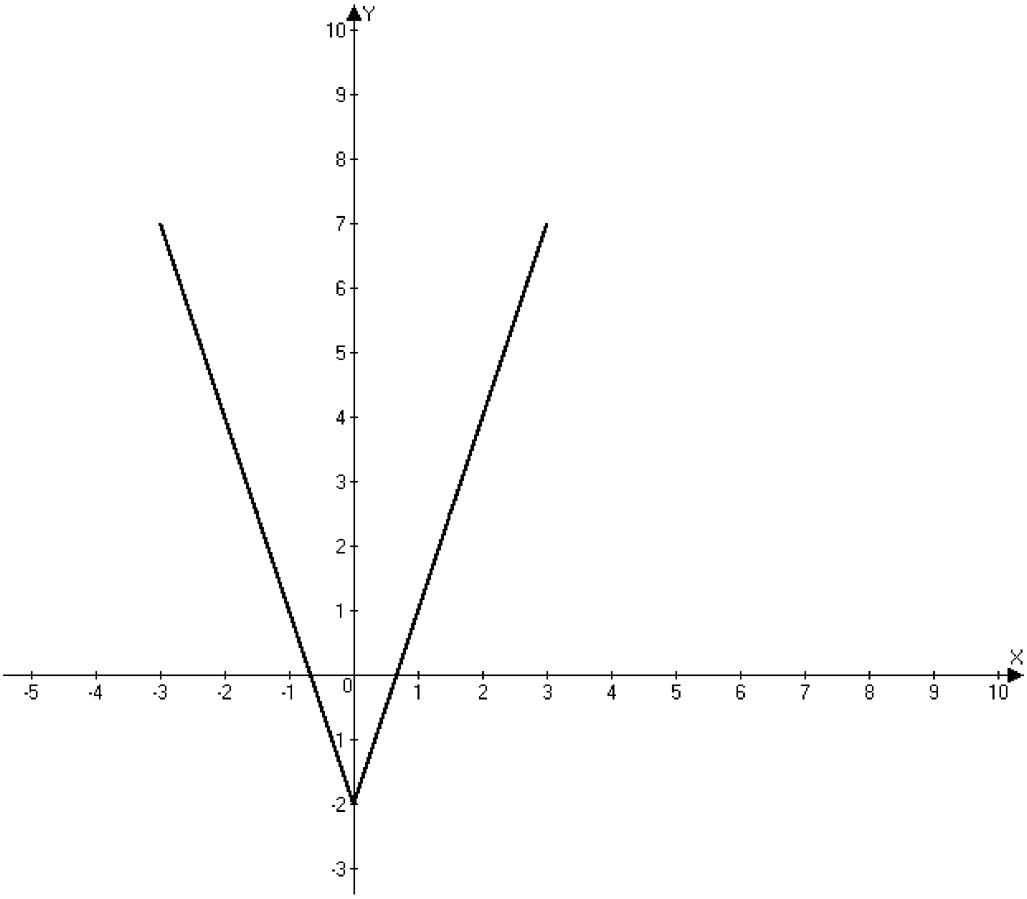


График периодического продолжения функции


Y
X
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

2) Разложим заданную функцию в ряд Фурье по косинусам.

Для того, чтобы построить ряд Фурье по косинусам для нашей функции, доопределим ее четным образом на промежуток $[-3;0]$.



Разложение функции в ряд Фурье по косинусам на интервале $(-l;l)$ имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}$$

В данном случае, функция определена на полупериоде $[0;3]$, т.е. $l=3$. Вычислим коэффициенты Фурье a_n:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{2}{3}\int_0^3(3x-2)dx=\frac{2}{3}\left(\frac{3x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_0^3=\frac{2}{3}\left(\frac{27}{2}-6\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{2}=5$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{3}\int_0^3(3x-2)\cdot\cos\frac{\pi nx}{3}dx=$$

$$\left|\begin{array}{l} \text{По частям}: \int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu \\ u=3x-2 \quad\Rightarrow\quad du=3dx \\ dv=\cos\frac{\pi nx}{3}dx \quad\Rightarrow\quad v=\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3} \end{array}\right|$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{3(3x-2)}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\Bigg|_0^3-\frac{9}{\pi n}\int_0^3\sin\frac{\pi nx}{3}dx\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{21}{\pi n}\sin\pi n-\frac{-6}{\pi n}\sin 0+\frac{27}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{3}\Bigg|_0^3\right)=$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{21}{\pi n} \cdot + \frac{6}{\pi n} \cdot 0 + \frac{27}{\pi^2 n^2} (\cos \pi n - \cos 0) \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{\pi^2 n^2} \left((-1)^n - 1 \right) = \frac{18 \cdot \left((-1)^n - 1 \right)}{\pi^2 n^2}$$

Таким образом, искомое разложение функции в ряд Фурье по косинусам имеет вид:

$$f(x) = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18 \cdot \left((-1)^n - 1 \right)}{\pi^2 n^2} \cdot \cos \frac{\pi n x}{3}, \quad x \in [0;3]$$

Изобразим график суммы ряда Фурье по косинусам $S_c(x)$:

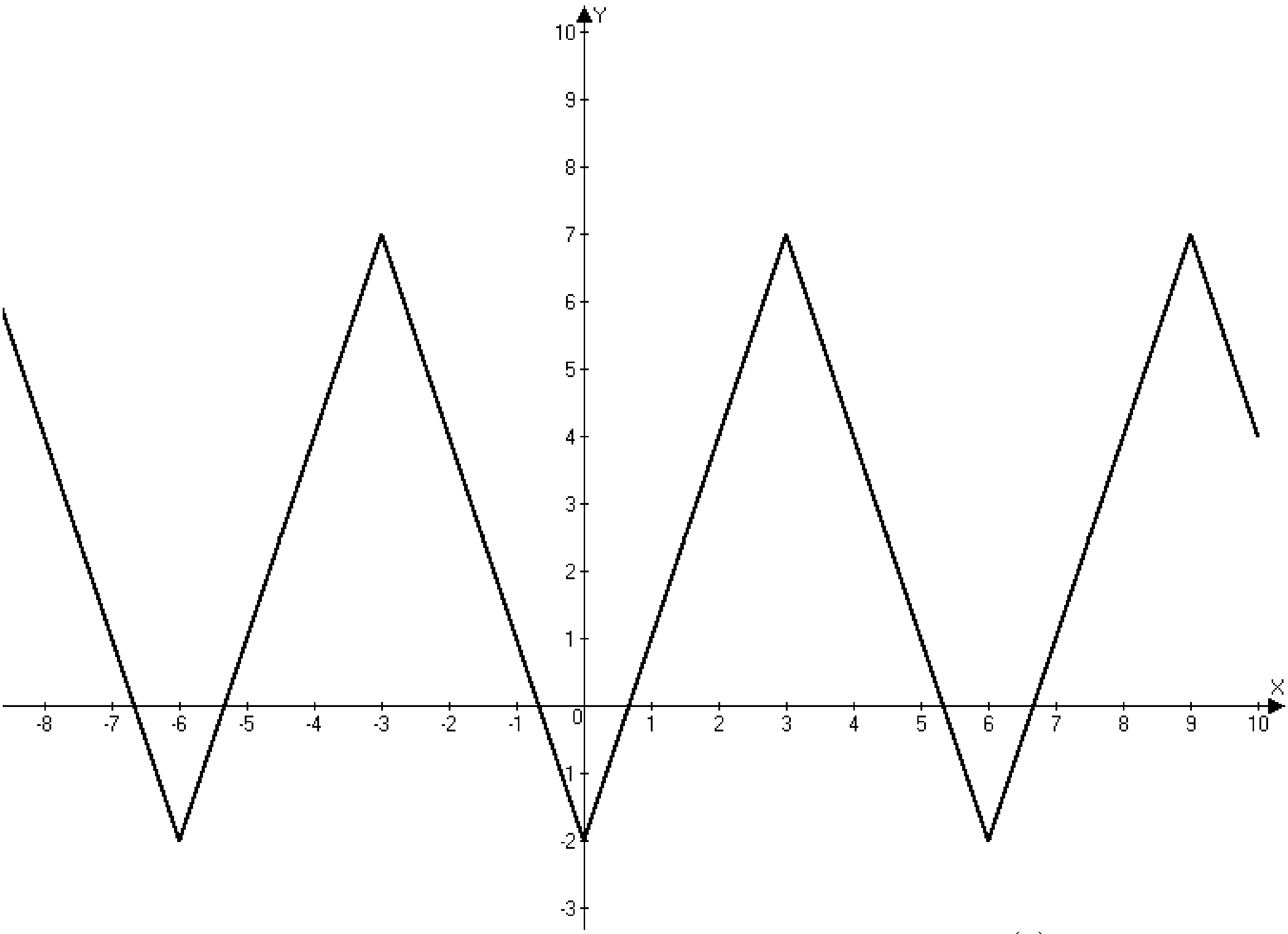
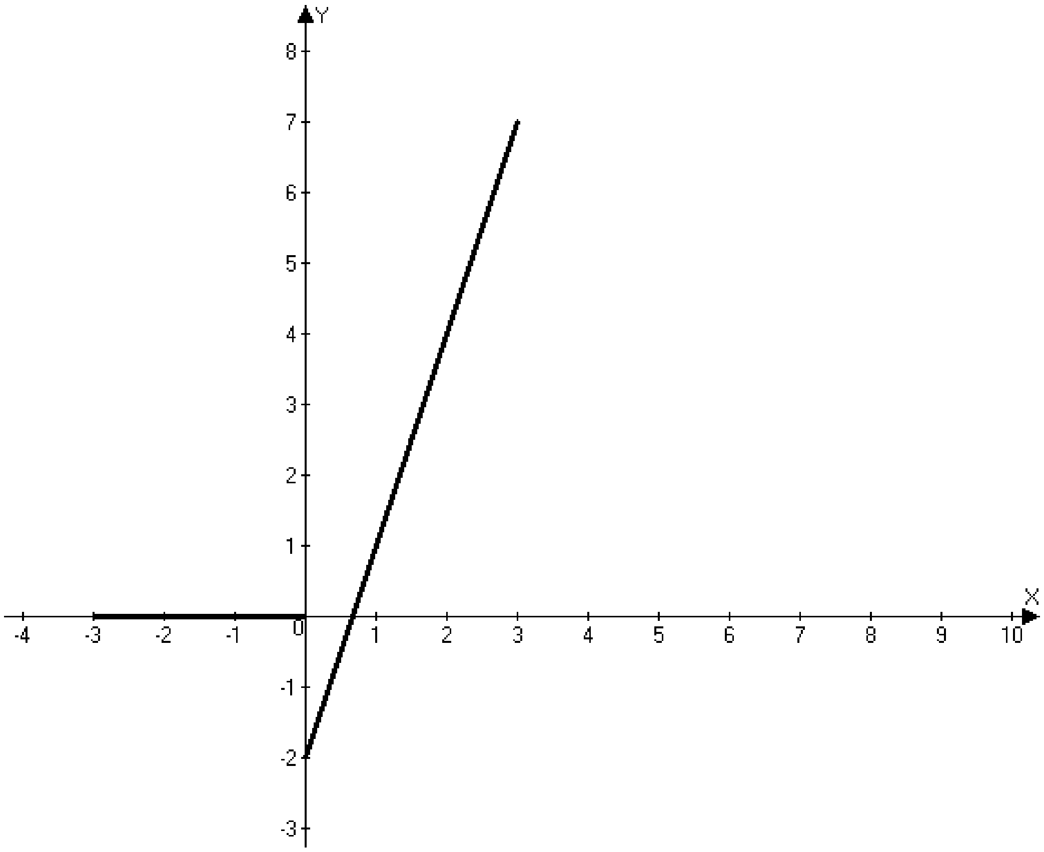


График периодического продолжения совпадает с графиком $S_c(x)$.

3) Получим одно из разложений общего вида. Для этого доопределим функцию на интервале $[-3;0]$ нулем, т.е. разложим в ряд Фурье функцию:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-3;0]\\ 3x-2, & x\in[0;3]\end{cases}$$



Ряд Фурье для функции $f(x)$ на произвольном интервале $[-l;l]$ имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right)$$

В данном случае $l=3$, найдем коэффициенты ряда:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}0\cdot dx+\frac{1}{3}\int_{0}^{3}(3x-2)dx=\frac{1}{3}\int_{0}^{3}(3x-2)dx=\frac{1}{3}\left(\frac{3x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{27}{2}-6\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{2}=\frac{5}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{1}{3}\int_{0}^{3}(3x-2)\cos\frac{\pi nx}{3}dx=\left|\begin{array}{l}\text{По частям}: \int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu\\ u=3x-2\ \Rightarrow\ du=3dx\\ dv=\cos\frac{\pi nx}{3}dx\ \Rightarrow\ v=\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3(3x-2)}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\Bigg|_0^3-\frac{9}{\pi n}\int_0^3\sin\frac{\pi nx}{3}dx\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{21}{\pi n}\sin\pi n-\frac{-6}{\pi n}\sin 0+\frac{27}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{3}\Bigg|_0^3\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{21}{\pi n}\cdot+\frac{6}{\pi n}\cdot 0+\frac{27}{\pi^2 n^2}(\cos\pi n-\cos 0)\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n-1\right)=\frac{9\cdot\left((-1)^n-1\right)}{\pi^2 n^2};$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx=\frac{1}{3}\int_{0}^{3}(3x-2)\sin\frac{\pi n x}{3}dx=\left|\begin{array}{l} \textit{По частям}: \int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du \\ u=3x-2 \quad\Rightarrow\quad du=3dx \\ dv=\sin\frac{\pi n x}{3}dx \quad\Rightarrow\quad v=-\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{3} \end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3(2-3x)}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3+\frac{9}{\pi n}\int_0^3\cos\frac{\pi n x}{3}dx\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{-21}{\pi n}\cos\pi n-\frac{6}{\pi n}\cos 0+\frac{27}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{-21}{\pi n}\cdot(-1)^n-\frac{6}{\pi n}\cdot 1+\frac{27}{\pi^2 n^2}\sin\pi n-\frac{27}{\pi^2 n^2}\sin 0\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{-21\cdot(-1)^n}{\pi n}-\frac{6}{\pi n}+\frac{27}{\pi^2 n^2}\cdot 0-\frac{27}{\pi^2 n^2}\cdot 0\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{21\cdot(-1)^{n+1}-6}{\pi n}=\frac{7\cdot(-1)^{n+1}-2}{\pi n}$$

Таким образом, разложение данной функции в ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x)=\frac{5}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9\cdot\left((-1)^n-1\right)}{\pi^2 n^2}\cdot\cos\frac{\pi n x}{3}+\frac{7\cdot(-1)^{n+1}-2}{\pi n}\cdot\sin\frac{\pi n x}{3}\right)$$

Изобразим график суммы ряда Фурье:

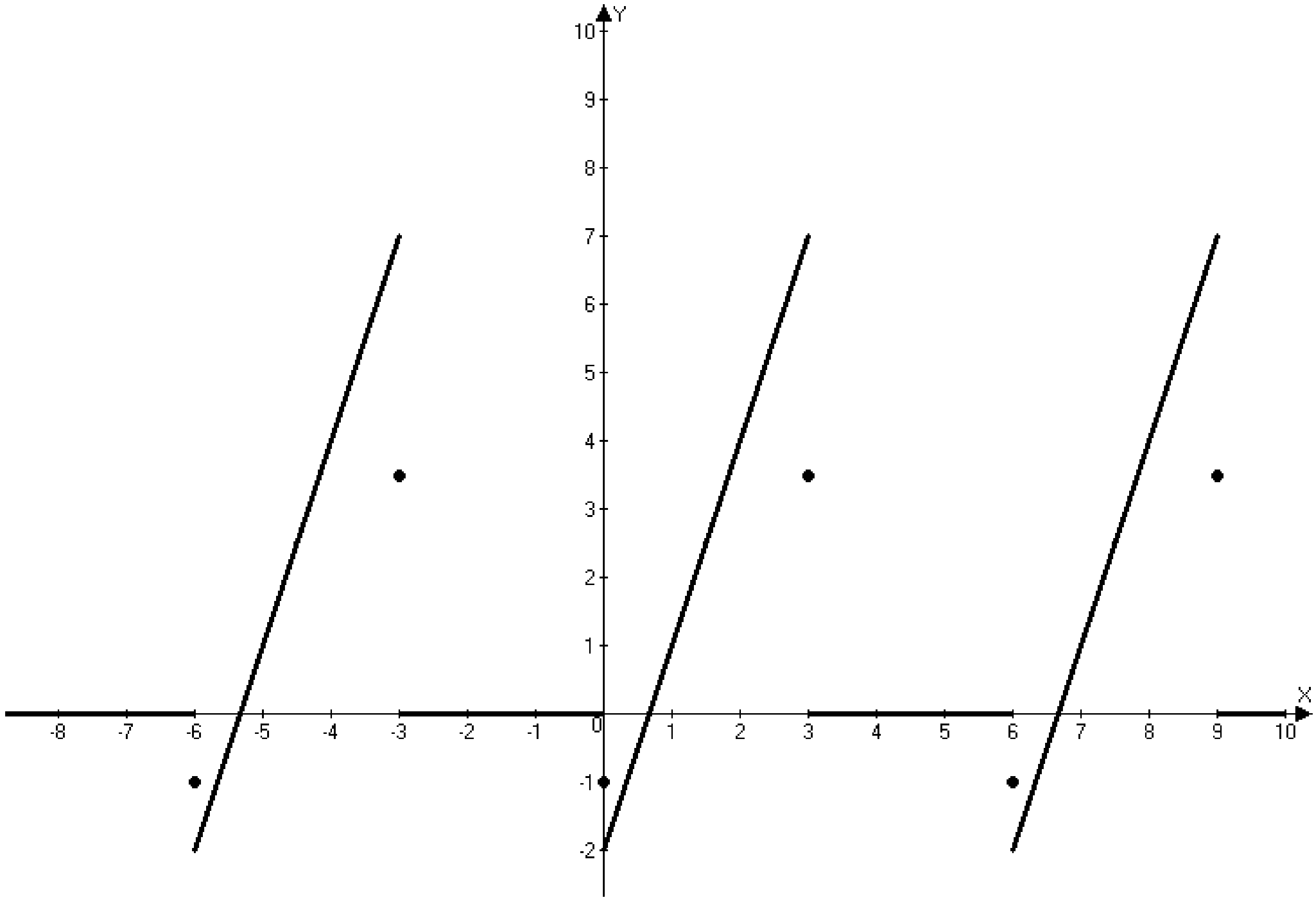
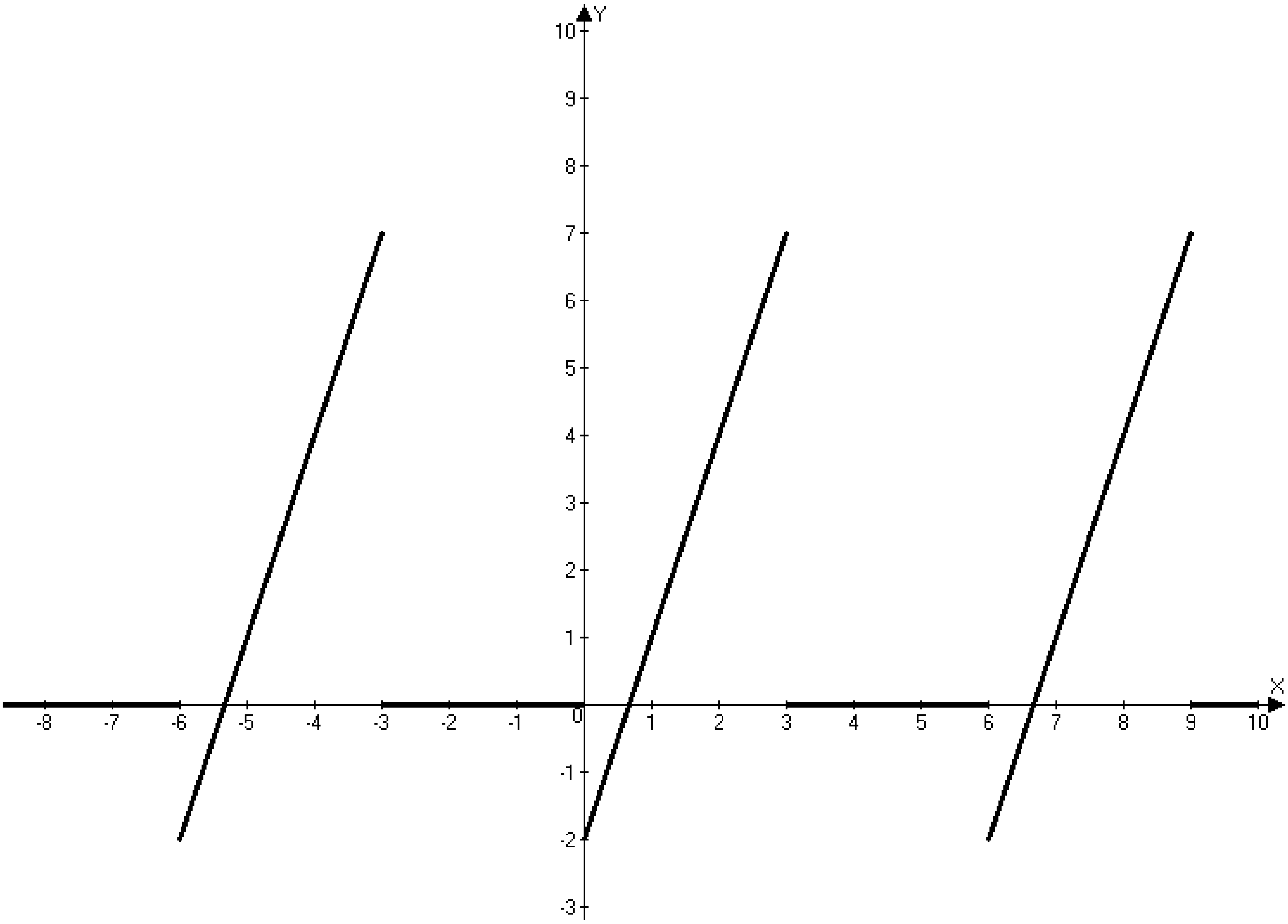


График периодического продолжения:


Y
X
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10